TEORIJA SIGNALA I INFORMACIJA

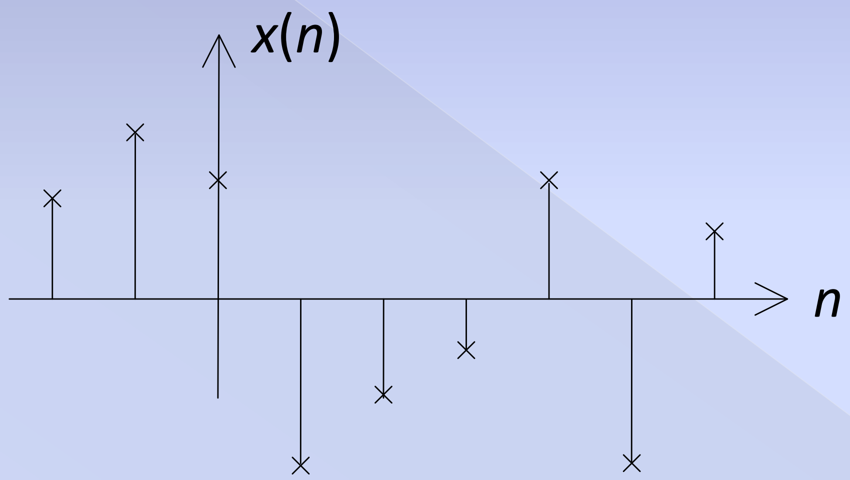
Studijski program: Primijenjeno računarstvo

VI termin

Dr Nevena Radović

Diskretni signali

- Diskretni signali se matematički predstavljaju u obliku niza realnih ili kompleksnih brojeva.



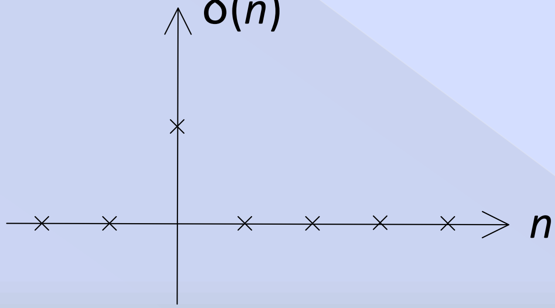
- $x(n)$ je definisano samo za cjelobrojne vrijednosti n.

Primjeri često korišćenih diskretnih nizova

Jedinični impuls

- Veoma je čest slučaj (ima istu ulogu) kao δ impuls (Dirakova funkcija) u analognom domenu.
- Bitna je razlika između jediničnog impulsa i Dirakovog impulsa: Jedinični impuls je stvarni signal; Dirakov impuls je fiktivni signal.

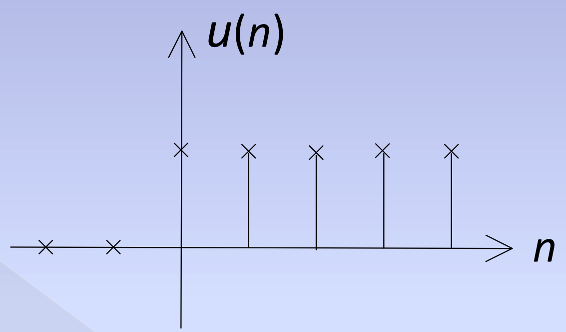
$$\delta(n)=\begin{cases}0, & n\neq 0\\ 1, & n=0\end{cases}$$



Primjeri često korišćenih diskretnih nizova

Jedinični step niz

$$u(n)=\begin{cases}1, & n\geq 0\\ 0, & n<0\end{cases}$$



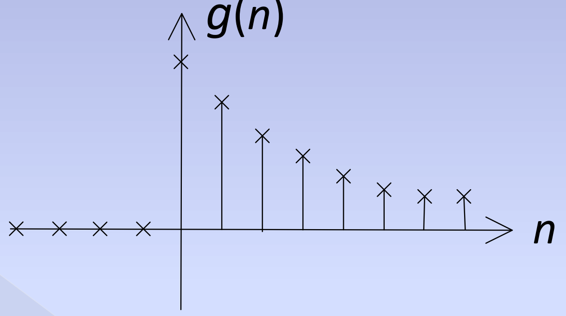
- $u(n)$ se može izraziti preko $\delta(n)$:

$$u(n)=\sum_{k=-\infty}^{n}\delta(k)$$

Primjeri često korišćenih diskretnih nizova

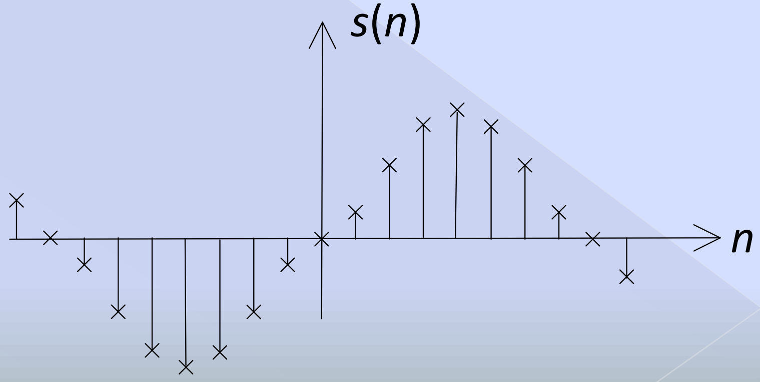
Realni eksponencijalni signal (niz)

$$g(n)=\begin{cases} a^n, & n\geq 0, \quad a<1 \\ 0, & n<0 \end{cases}$$



Sinusni niz

$$s(n)=A\sin(\omega_0 n+\theta)$$



Periodični niz

- Niz $x(n)$ je periodičan ako je $\mathbf{x(n)=x(n+N)}$.
- Najmanja vrijednost N za koju važi ova jednakost se naziva **periodom**.
- N mora biti cio broj. Ako N nije cio broj, onda signal nije periodičan.
- **Primjer:**

Ispitati periodičnost i odrediti periodu signala:

a) $x(n)=e^{j\frac{2\pi n}{3}}$ b) $x(n)=\cos\frac{2\pi}{6/7}n$ c) $x(n)=\sin 3n$

Periodični niz

- Rješenje:

a) $x(n)=x(n+N) \Leftrightarrow e^{j\frac{2\pi}{3}(n+N)}=e^{j\frac{2\pi}{3}n}$

$$e^{j\frac{2\pi}{3}n}e^{j\frac{2\pi}{3}N}=e^{j\frac{2\pi}{3}n} \quad / : e^{j\frac{2\pi}{3}n}$$

$$e^{j\frac{2\pi}{3}N}=1 \quad \Rightarrow važi\ za\ \frac{2\pi}{3}N=2k\pi$$

$$\Rightarrow N=3k \Rightarrow\ Perioda\ N=3\ \ za\ \ k=1$$

Periodični niz

- Rješenje:

b) $x(n)=x(n+N) \quad \Leftrightarrow \quad \cos\frac{2\pi}{6/7}n=\cos\frac{2\pi}{6/7}(n+N)$

$$\frac{2\pi}{6/7}N=2k\pi \quad \Rightarrow N=\frac{6}{7}k \ \Rightarrow \textit{Perioda } N=6 \textit{ za } k=7$$

c) $x(n)=x(n+N) \quad \Leftrightarrow \quad \sin 3n=\sin 3(n+N)$

$$3N=2k\pi \ \Rightarrow \ N=\frac{2k\pi}{3}$$

$\Rightarrow$ *Nije periodičan signal, pošto ne može biti cjelobrojno* N*, jer je* $\frac{\pi}{3}$ *realan broj.*

Periodični niz

- Proizvoljni niz $x(n)$ se može predstaviti preko $\delta(n)$:

$$x(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$

- **Dokaz**:
- $\delta(n-k)$ ima jediničnu vrijednost samo za $k=n$ i

$$\delta(n-k)=\begin{cases}0, & n\neq k\\ 1, & n=k\end{cases}$$ pa slijedi da je:

$$x(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k) \underset{n=k}{=} x(n)\delta(0)=x(n)$$

Parametri za opisivanje diskretnog signala

- **Magnituda signala:** je maksimalna apsolutna vrijednost elemenata niza x(n).

$$M = \max_{-\infty < n < \infty} |x(n)|$$

- **Energija signala:**

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2$$

- **Snaga signala:**

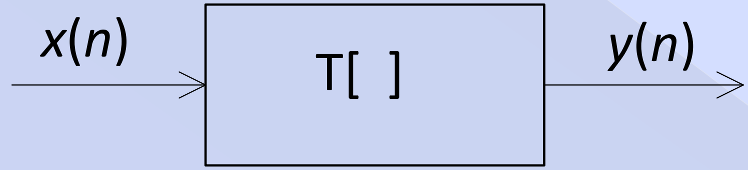
$$P = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x(n)|^2$$

Diskretni sistemi

- Diskretni sistem se opisuje algoritmom kojim se transformiše ulazni signal $x(n)$ u izlazni signal $y(n)$:

$$y(n)=T[x(n)]$$

- T[ ] je operator kojim se označava transformacija koju vrši sistem.



- Osobine operatora T određuju klasu kojoj pripada sistem.

Linearni vremenski invarijantni diskretni sistemi

- **Linearnost:**

$$T[Ax_1(n)+Bx_2(n)]=AT[x_1(n)]+BT[x_2(n)]$$

Odziv na linearnu kombinaciju ulazanih signala je identična linearna kombinacija odziva na pojedine ulazne signale.

Primjer: Ispitati linearnost sljedećih sistema:

a) $y(n)=\mathrm{T}[x(n)]=x^2(n)$ b) $y(n)=\mathrm{T}[x(n)]=x(n)-x(n-1)$

Rješenje:

a) $T[Ax_1(n)+Bx_2(n)]=[Ax_1(n)+Bx_2(n)]^2=$

$$=A^2x_1^2(n)+2ABx_1(n)x_2(n)+B^2x_2^2(n)$$

$$\neq A^2x_1^2(n)+B^2x_2^2(n)=AT[x_1(n)]+BT[x_2(n)]$$

što znači da sistem nije linearan.

Linearni vremenski invarijantni diskretni sistemi

- Rješenje:

b) $$T[Ax_1(n)+Bx_2(n)]=Ax_1(n)+Bx_2(n)-(Ax_1(n-1)+Bx_2(n-1))=$$
$$=A(x_1(n)-x_1(n-1))+B(x_2(n)-x_2(n-1))=$$
$$=AT[x_1(n)]+BT[x_2(n)]$$

što znači da je sistem linearan.

- <u>**Vremenska invarijantnost**</u>:
- Karakteristike sistema nijesu funkcije vremena. Dakle, ako je:

$$y(n)=\mathrm{T}[x(n)] \Rightarrow y(n-N)=\mathrm{T}[x(n-N)]$$

- <u>Primjer</u>: Ispitati vremensku invarijantnost sistema:

a) $y(n)=\mathrm{T}[x(n)]=x(n)+x(n-1)$

b) $y(n)=\mathrm{T}[x(n)]=nx(n)$

Linearni vremenski invarijantni diskretni sistemi

- Rješenje:

a) $\mathrm{T}[x(n-N)]=x(n-N)+x(n-N-1)=y(n-N)$

Dakle, sistem je vremenski invarijantan.

b) $\mathrm{T}[x(n-N)]=nx(n-N)\neq(n-N)x(n-N)=y(n-N)$

Dakle, sistem nije vremenski invarijantan.

Odziv linearnog vremenski invarijantnog sistema

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k) \Rightarrow y(n) = T[x(n)]$$

$$y(n) = T[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)T[\delta(n-k)]$$

- Upotrebom osobine vremenski invarijantnog sistema: $T[\delta(n-k)] = h(n-k)$, gdje je $h(n) = T[\delta(n)]$ impulsni odziv sistema:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

Odziv linearnog vremenski invarijantnog sistema

- Dakle, ukoliko znamo impulsni odziv sistema $h(n)$ u potpunosti poznajemo sistem i sistem se tada jedinstveno može opisati:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = x(n) * h(n) \;\Rightarrow \textit{konvoluciona suma}$$

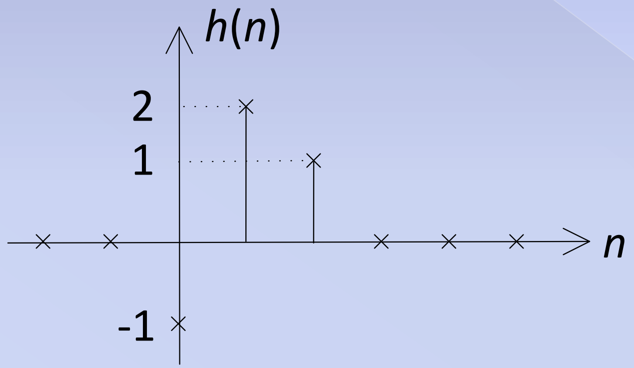
- Osobina komutativnosti konvolucione sume:

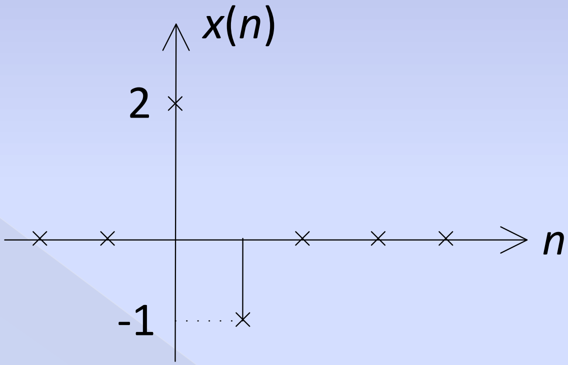
$$x(n) * h(n) = h(n) * x(n)$$

- <u>U kontinualnom domenu</u>: Konvolucija opisuje sistem i nema značajnu praktičnu primjenu.
- <u>U diskretnom domenu</u>: Konvolucija ima teorijsku važnost, ali i praktičnu vrijednost u realizaciji diskretnih sistema.

Odziv linearnog vremenski invarijantnog sistema

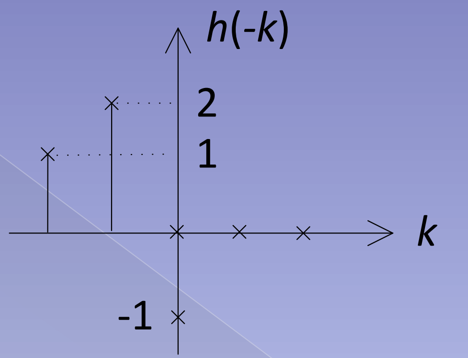
- <u>Primjer</u>: Impulsni odziv posmatranog sistema $h(n)$ je predstavljen na slici. Naći odziv sistema na ulazni niz $x(n)$ predstavljen na slici:



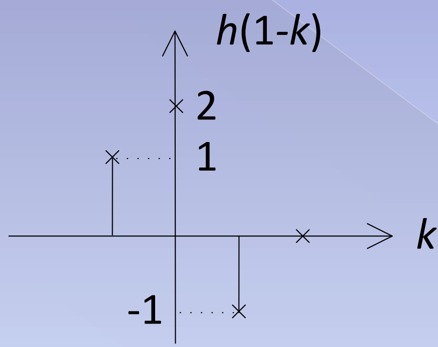


- <u>Rješenje</u>:

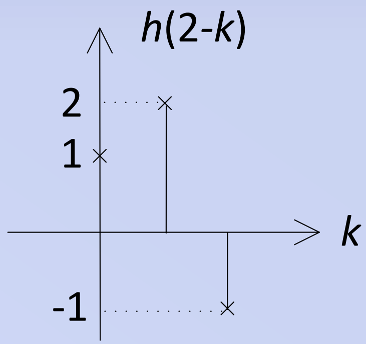
$$y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$



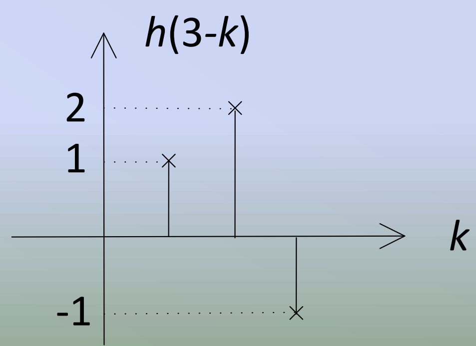
Za n=0: $y(0)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(-k)=2(-1)=-2$



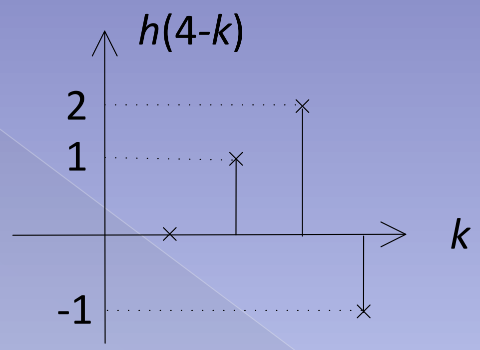
Za n=1: $y(1)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(1-k)=2\bullet 2+(-1)(-1)=5$



Za n=2: $y(2)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(2-k)=2\bullet 1+(-1)2=0$

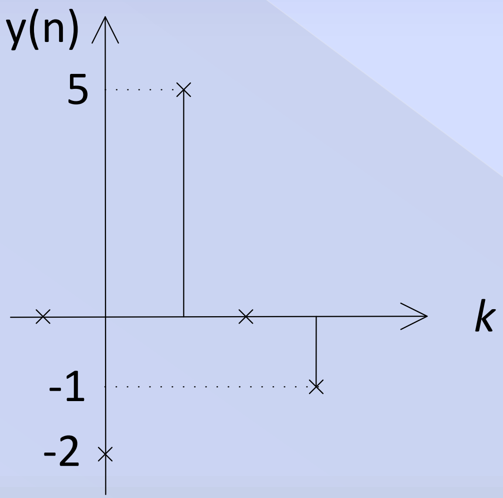


Za n=3: $y(3)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(3-k)=(-1)1=-1$



Za $n \geq 4$: $y(n)=0$ i za $n<0$: $y(n)=0$

Dakle, odziv posmatrnog sistema na datu pobudu je:



Odziv linearnog vremenski invarijantnog sistema

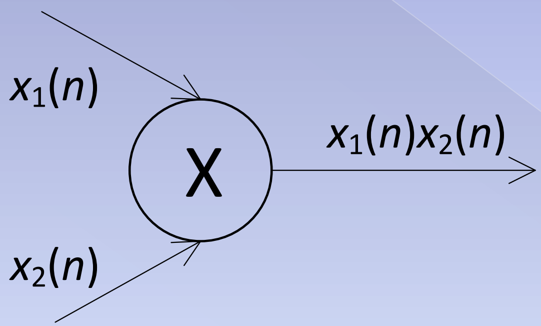
- **Zaključak**:

  Impulsni odziv sistema $h(n)$ je gotovo uvijek poznat. Kada znamo $h(n)$ uvijek se može realizovati sistem i tražiti odziv na proizvoljni pobudni signal $x(n)$. Ako su $x(n)$ i $h(n)$ kompleksni i dugačni nizovi konvolucionu sumu izračunavamo upotrebom računara.

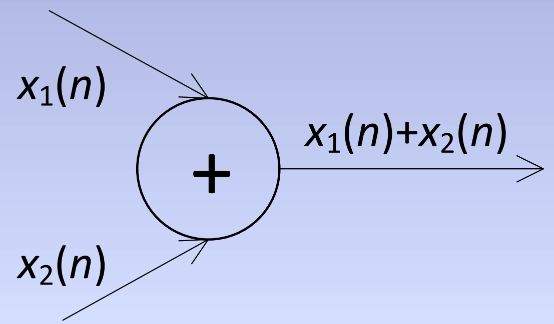
- Načini realizacije sistema:
  - Softwer-ski (računarski)
  - Hardware-ski (upotrebom množača, sabirača, kola za kašnjenje)

Hardware-ska realizacija sistema

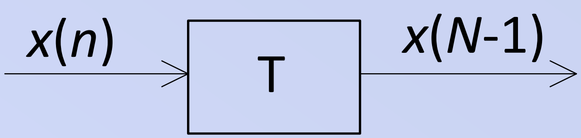
Množač:



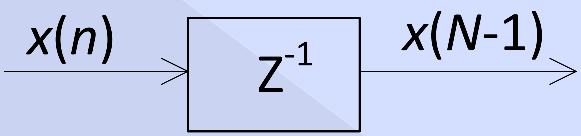
Sabirač:



Kolo za kašnjenje:



ili



Kauzalnost i stabilnost

- **Kauzalnost sistema**:

  Ne postoji odziv prije pobude!

  Kod kauzalnih sistema:

  $$h(n)=0 \text{ za } n<0,$$

  pošto je $h(n)$ odziv na pobudni signal $\delta(n)$ koji je 0 za $n<0$.

  → Niz $x(n)$ kod koga je $x(n)=0$ za $n<0$ je kauzalni niz.

Kauzalnost i stabilnost

- **Stabilnost sistema:**

  Pretpostavimo da je $|x(n)| < M$ za svako n.

  Kod stabilnih sistema je u tom slučaju:

  $$|y(n)| < \infty \text{ za svako } n.$$

  $$|y(n)| = \left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)\right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)||x(n-k)| < M \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty$$

  Dakle, diskretni sistem je stabilan ako je:

  $$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty$$